

# Matemaatika on mehaanika kaksikvend ja inseneri parim sõber

**Andrus Salupere**

Tahkismehaanika labor, Küberneetika instituut  
Loodusteaduskond, Tallinna Tehnikaülikool

Täienduskoolitus  
SA Professor Karl Õigeri Stipendiumifond

- Endast
- Matemaatikast ja mehaanikast
  - matemaatika allikad
  - vektorid, tuletised, integraalid, märgireeglid jne.,
  - Sisult matemaatiline ja vormilt ketserlik ettepanek

Ettekande eesmärgiks on näidata, et matemaatiliste printsiipide ja meetodite järjekindel rakendamine muudab mehaanikaülesannete lahendamise lihtsamaks ja teeb seeläbi matemaatikast inseneri parima sõbra.

- Sündisin 5. septembril 1957. a.
- Jõgeva Keskkool 1976. a.
- 1976. a. septembrist kuni 1986 detsembrini Tartu (Riiklikus) Ülikoolis matemaatika teaduskonnas
  - 1976. – 1981. Rakendusmatemaatika üliõpilane 5 aastat = magister
  - 1981. – 1983. aastat stažöör-uuriija teoreetilise mehaanika kateedris
  - 1983. – 1986. aspirant teoreetilise mehaanika kateedris (kaitsmine 1991.)
    - Jäik-plastsete astmeliste ümar- ja rõngasplaatide optimaalne projekteerimine

- Alates 1986. aasta detsembrist Tallinna Tehnikaülikoolis
  - teoreetilise mehaanika kateeder – üldteoreetiliste õppeainete teaduskond
  - ehitusmehaanika kateeder – ehitusteaduskond
  - mehaanikainstituut – ehitusteaduskond
  - küberneetika instituut – TTÜ asutus
  - küberneetika instituut – loodusteaduskond
- Ametid
  - tunnitasuiline õppejõud
  - assistent
  - dotsent
  - vanemteadur
  - professor alates 2002. a.
  - Küberneetika instituudi direktor alates 2009. a.
    - + erinevad nõukogud, komisjonid jms kohustused

- Õppetöö
  - 1983.-1989. – programmeerimine, kõrgem matemaatika
  - alates 1988. – mehaanika
    - staatika, dünaamika, analüütiline mehaanika – teoreetiline mehaanika ehk jäikade kehade ja punktmasside mehaanika
    - tugevusõpetus, elastsusteooria, pideva keskkonna mehaanika – deformeeruvad kehad + vedelikud, gaasid
- Teadustöö
  - Mittelineaarsed lained, solitonid
- Suhted ehitusinseneridega
  - EÜE 1977 – 1982 (1984)
  - töö TTÜs ja Kübls
    - õppetöö ehitusteaduskonnas

(Rakendus)matemaatika allikad – mehaanika, füüsika ja muud

- mehaanika probleem
- mudel  $\Rightarrow$  (diferentsiaal)võrrand(id)
- lahendi eksisteerimine ja ühesus – jah/ei
- ei: uus mudel
- jah: lahend
- analüütiline – jah/ei
- jah: valem (analüütiline avaldis)
- ei: arvutusmeetod  $\Rightarrow$  numbriline lahend

- 
- Selles reas puuduvad selged piirid teoretikute ja rakendajate vahel.
  - Inseneri jaoks võivad need kõik tunduda väga teoreetilised tegevused, sest teda huvitab tavaliselt vaid lahend

## Teoreetiline suund

- rakenduslikud tulemused  $\Rightarrow$  matemaatilised üldistused
- puhas matemaatika – rakendused võivad tulla hiljem
  - näiteks kompleksarvud

- Koolifüüsika – mehaanika primitiivne käsitlus
  - kinnistuvad pooltõed, ebatäpsused jms
  - näiteks ühtlase liikumise ja ühtlaselt kiireneva liikumise valemid
  - mehaanika põhiülesanne – leida keha asukoht mis tahes ajahetkel
    - e-õpik : Mehaanika, Autor: Indrek Peil
  - Tegelikkus on tunduvalt mitmekesisem ja matemaatilisem

# MEHAANIKA

## JÄIGA KEHA MEHAANIKA (TEOREETILINE MEHAANIKA)

STAATIKA

KINEMAATIKA

DÜNAAMIKA\*

ANALÜÜTILINE  
MEHAANIKA

DÜNAAMIKA

TEHNILINE  
MEHAANIKA

MEHHAANISMIDE JA  
MASINATE TEOORIA

## PIDEVA KESKKONNA MEHAANIKA

### DEFORMEERUVA KEHA MEHAANIKA

ELASTUSUSTEOORIA

TUGEVSÖPETUS

PLASTSUSTEOORIA

EHITUSMEHAANIKA

PLAATIDE JA KOORIKUTE  
TEORIA

JNE.

HÜDRO- JA AEROMEHAANIKA

JNE.

KEHADE SÜSTEEMI  
DÜNAAMIKA

BALLISTIKA

ARVUTUSMEHAANIKA

JNE.

- jõud
- punkti kohavektor, siire e. paigutis e. nihe (füüsikutel)
- kiirus, kiirendus
- pööre (pöördenuk)
- nurkkiirus, nurkkiirendus
- jõu moment, jõupaar
- liikumishulk (impulss), liikumishulga moment (impulsi moment, pöördeimpulss, pöörlemishulk)
- pinge
- jne.

NB! Primaarsed on alati vektorvõrrandid. Skalaarsed võrrandid saadakse neist koordinaattelgedele projekteerimise teel.

- liitmine, skalaariga korrutamine, jms
- pikkus, ühikvektor
- skalaarkorrutis
- vektorkorrutis
- projektsioonid (koordinaat)telgedele

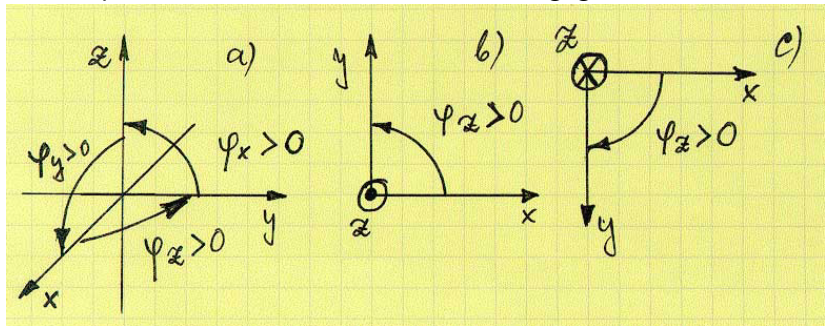
---

Graafilised meetodid – vektorite liitmine ja lahutamine

- tavaliselt Descartes'i ristkoordinaadid
  - tavaliselt  $x, y, z$
  - vahel  $z_1, z_2, z_3$
  - vahel  $x_1, x_2, x_3$
- vahel on otstarbekas kasutada silindrilisi või sfäärilisi koordinaate
- harva ka eksootilisi koordinaate – elliptilised, hüperboolsed jne
- üldjuhul parema käe koordinaadid

# Pöörde positiivne suund

Pöörde positiivne suund määratakse kuvireegli!

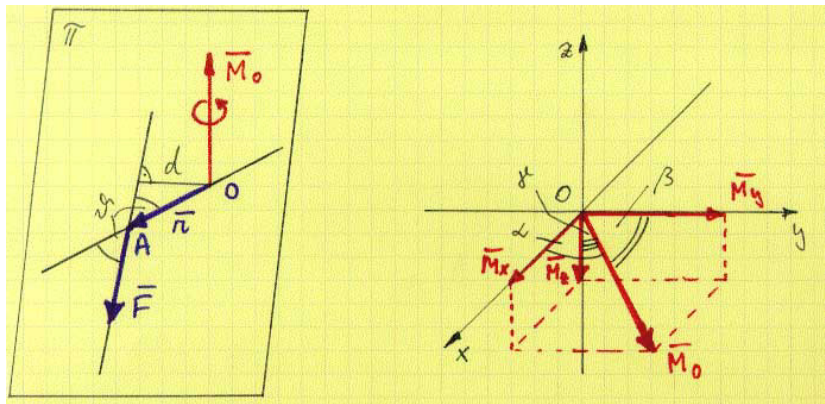


Kellad ja Päikese võiks siin ära unustada!

# Jõu moment on vektor!

*Jõu momendiks punkti suhtes* nimetatakse vektorit, mis võrdub jõu rakenduspunkti  $A$  kohavektori  $\mathbf{r}$  ja jõuvektori  $\mathbf{F}$  vektorkorrutisega.

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad M_O \equiv |\mathbf{M}_O| = Fr \sin \vartheta = Fd. \quad (1)$$



- Momentvektori  $\mathbf{M}_O$  suurus (ehk moodul) ja suund sõltub punkti  $O$  valikust kuid ei sõltu punkti  $A$  valikust jõu mõjusirgel.
- Momentvektori  $\mathbf{M}_O$  mõjusirge määrab telje, mille ümber jõud  $\mathbf{F}$  püüab tekitada pöörlemist.
- Jõu moment telje suhtes – mõistlik on ka seda vaadelda vektorina:  

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_x + \mathbf{M}_y + \mathbf{M}_z$$
  - $\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y, \mathbf{M}_z$  on  $\mathbf{M}_O$  komponendid
  - $M_x, M_y, M_z$  on  $\mathbf{M}_O$  projektsioonid
- Tasakaaluvõrrandid:  $\mathbf{M}_O = 0$  projektsioonid koordinaattelgedel
  - $M = \pm Fd$ , märk krüvireegliga

*Jõusüsteem on tasakaalus* parajasti siis kui peavektor  $\mathbf{F}_O$  ja mingi punkti  $O$  suhtes leitud peamoment  $\mathbf{M}_O$  on võrdsed nulliga:

$$\mathbf{F}_O = \sum_i \mathbf{F}_i = 0, \quad \mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) = 0. \quad (2)$$

*Skalaarsed tasakaalu tingimused:*

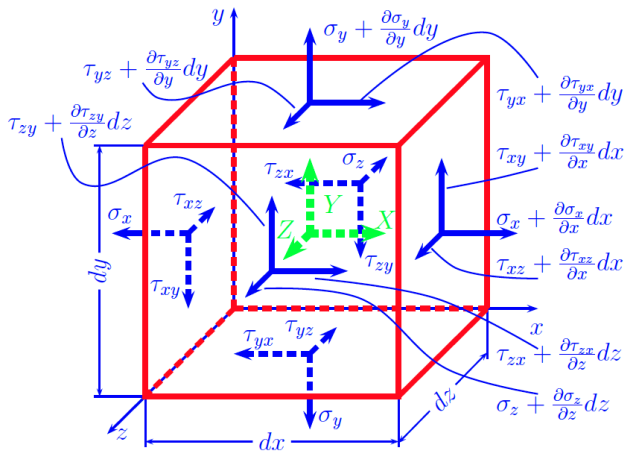
$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0, & \sum_i F_{iy} = 0, & \sum_i F_{iz} = 0, \\ \sum_i M_x(\mathbf{F}_i) = 0, & \sum_i M_y(\mathbf{F}_i) = 0, & \sum_i M_z(\mathbf{F}_i) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

NB! Primaarsed on vektorvõrrandid (2)!

- Tuletis iseloomustab funktsiooni muutumise kiirust.
- $y = f(x) \Rightarrow y' = f'(x)$  annab funktsiooni  $y = f(x)$  puutuja tõusu, s.t. tema muutumise kiiruse  $x$  järgi
- $x = f(t) \Rightarrow \dot{x} = dx/dt$  annab samuti funktsiooni  $x = f(t)$  puutuja tõusu, s.t. tema muutumise kiiruse  $t$  järgi
- funktsiooni uurimine: nullkohad, ekstreemumid, käänupunktid, kumerus, nõgusus jne.

## Osatuletised

- $\Psi = \Psi(x, y, z) \Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial x}$  annab funktsiooni  $\Psi = \Psi(x, y, z)$  muutumise kiiruse  $x$  järgi, jne.
- Gradient



Joonis 5.1: Elementaarristtahukas

Keha on tasakaalus, järelikult peab ka elementaarristtahukas olema tasakaalus ja talle mõjuvate jõudude peavektor ja peamoment olema võrdsed nulliga. Tasakaaluvõrrandite koostamiseks liidame esiteks risttahukale mõjuvate jõudude projektsioonid  $x$ -teljele ja võrrutame saadu nulliga:

$$\begin{aligned} \left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \\ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + X dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Avame sulud ja jagame saadud võrrandi elementaarruumalaga  $dV = dx dy dz$ :

$$\frac{\sigma_x}{dx} + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} - \frac{\sigma_x}{dx} + \frac{\tau_{yx}}{dy} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\tau_{yx}}{dy} + \frac{\tau_{zx}}{dz} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\tau_{zx}}{dz} + X = 0.$$

Peale koondamist saame ühe otsitavatest võrranditest

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \quad (5.4)$$

Analoogiliselt saab tuletada veel kaks tasakaaluvõrrandit kasutades jõudude projektsioone  $y$ - ja  $z$ -teljel:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Saadud võrrandid ongi *elastse keha tasakaalu (diferentsiaal)võrrandid*. Kui ma-  
hujõudude projektsioonid sisaldavad inertsjõudusid, saab viimste abil lahenda-  
da ka dünaamika ülesandeid.

- Momentide tasakaaluvõrrand  $\Rightarrow$  nihkepingete paarsus

- Tuletise pöördoperatsioon
- Algne tähendus: pindala

## Punkti kinemaatika

- kohavektor  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \Rightarrow x = x(t)$  jne
- kiirus  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \Rightarrow v_x = \dot{x}$  jne
- kiirendus  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} \Rightarrow a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$  jne

## Vastupidi: integreerimine

- kiirus:  $\int_0^t dv_x = \int_0^t a_x dt$  jne  $\Rightarrow \mathbf{v}$
- liikumisvõrrandid  $\int_0^t dx = \int_0^t v_x dt$  jne  $\Rightarrow \mathbf{r}$

## Pöörlemine

- pöördenurk  $\phi = \phi(t) \Rightarrow \phi_z = \phi_z(t)$  jne
- nurkkiirus  $\omega = \dot{\phi} \Rightarrow \omega_z = \dot{\phi}_z$  jne
- nurkkiirendus  $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\phi} \Rightarrow \alpha_z = \dot{\omega}_z \dot{\phi}_z$  jne

Vastupidi: integreerimine analoogiliselt eelmisega

---

## Pöörleva keha punkti kiirus ja kiirendus

- $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$
  - $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ , s.t. puutekiirendus (vektor) + normaalkiirendus (vektor)
- 

Kõik liikumiste erijuhud on analüüsitavad eelnevast lähtudes. Lisaks võib vaja minna Euleri nurki.

Newtoni II seadus  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

Dünaamika 2 põhiülesannet:

- liikumine  $\Rightarrow$  jõud: diferentseerimine
- jõud  $\Rightarrow$  liikumine: diferentsiaalvõrrand
  - otsene integreerimine
  - diferentsiaalvõrrandi lahendamine – analüütiline või numbriline

Dünaamika üldteoreemid

- diferentseerimine ja integreerimine

- Rohkem matemaatikat – variatsioonarvutus
- D'Alembert'i printsiip
- üldistatud jõud ja üldistatud koordinaadid
- Lagrange'i võrrandid – mitme vabadusastmega süsteemid
- Hamiltoni võrrandid
- jne

Diferentsiaal- ja integraalseosed

$$\frac{dN}{dx} = -p_x, \quad \frac{dQ_z}{dx} = -p_z, \quad \frac{dM_y}{dx} = Q_z. \quad (4)$$

$$N(x) = N(a) - \int_a^x p_x(x) dx,$$

$$Q_z(x) = Q_z(a) - \int_a^x p_z(x) dx, \quad (5)$$

$$M_y(x) = M_y(a) + \int_a^x Q_z(x) dx.$$

- ekstreemumid, epüüri kuju
- integraalid  $\Leftrightarrow$  epüüride pindalad

- sisejõud  $\Leftrightarrow$  pinged
- pinnamomendid
- elastse joone (diferentsiaal)võrrand
- jne

---

Elastusteooria – veel rohkem matemaatikat

- Tasakaaluvõrrandid: selged reeglid - projektsisoonid + kruvireegel
- Pingetega on ka asi selge: positiivsel (sise)pinnal mõjub positiivne pinge vastava telje positiivses suunas ja negatiivsel (sise)pinnal negatiivses suunas.
- Põikjõu jaoks kehtib sama reegel.
- Pikijõu jaoks ka.
- Väändemomendile saab rakendada sama reeglit kui väljendada teda vektorina.
- Pändemoment – väljaspool aega ja ruumi: positiivsed ja negatiivsed kiud jms
  - tegelikult on suhteliselt praktiline kokkulepe

Suhtestumine globaliseeruvasse (inglisekeelsesse) maailma, s.t. inglisekeelsesse kirjandusse

- epüür – i.k. diagram
- vertikaaltelg: üles – alla
- Paindemomendi märgireeglid
  - väga erinevad kokkulepped (sign conventions)
  - üks variant: kasutatakse sama reeglit, mis pingete korral

Ettepanekud (inglisekeelse kirjanduse mõjul)

- loobuda terminist epüür
- loobuda alla suunatud telgedest
- võtta ka paindemomendi jaoks kasutusele pingetega analoogiline märgireegel

- Kogu mehaanika teooria on kirja pandud matemaatika keeles
- Seletada tuleb samuti matemaatika keeles – igasugused pseudolihtsustused teevad asja ainult segasemaks
- Matemaatika on sõber, mitte vaenlane
- Matemaatiline mõtlemine pole saatanast
- Miks siis üldse (üli)koolides matemaatikat õpetatakse, kui hiljem seda ei kasutata
- Mida vahem erinevaid kokkuleppeid ja reegleid, seda parem
- LEM – see on omaette ooper

Täna tähelepanu eest!

Küsimused on teretulnud!